Tentamen i MSG110 Sannolikhetsteori, 7.5 högskolepoäng, Göteborgs universitet.
Tid: Måndagen den 2 Januari 2017, kl. 8.30-12.30.
Examinator: Olle Nerman.
Jour: Olof Elias, room L3089, MV, Chalmers. Telefon 076 2026293.
Hjälpmedel: Miniräknare, egen formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medföljande tabeller.
Betygsgränser: För betyget G fordras 12 poäng, för betyget VG 20 poäng.

---

1. Tre händelser **A**, **B** och **C** är oberoende av varandra och har sannolikheterna **P(A)=0.4**, **P(B)=0.3** och **P(C)=0.1** . Beräkna
   a. Sannolikheten för att någon (minst en) av **A**, **B** och **C** inträffar. (1p)
   b. Sannolikheten att exakt en av **A, B** och **C** inträffar. (1p)
   c. Betingade sannolikheten **P(A | (A ∪ B))**. (1p)

2. I en Poissonprocess med intensiteten **2** ”händelsetidpunkter” per minut låter du **X** vara antalet händelsetidpunkter i ett visst **20-**minutersintervall. Beräkna med hjälp av centrala gränsvärdessatsen och halvtalskorrektion sannolikheten **P(X>43)**. (3p)

3. En stokastisk variabel **Y** har (kumulerade) fördelningsfunktionen

   F(y)=0 om **y** < **-1**,
   F(y)=0.5(y-1) om **y** tillhör intervallet **[-1,1]** och
   F(y)=1 om **y**>**1**.

   a. Vad är **P(Y>0.5)**? (1p)
   b. Vilken sannolikhetstäthet har **Y** (1p)
   c. Vilket väntevärde och vilken varians har absolutbeloppet av **Y**, d.v.s. **|Y|** ? (2p)

4. **X** och **Y** är två beroende stokastiska variabler med väntevärden **E[X]=7** och **E[Y]=9**, varianser **Var[X]=4** och **Var[Y]=2.25** och kovariansen **Kov[X,Y]= 1**. Beräkna
   a. Variansen för **Z=X+2Y**. (1p)
   b. Kovariansen mellan **Z** (definierad som i a) och **Y** (1p)
   c. Korrelationen mellan **Z** (definierad som i a) och **Y** (1p)

5. Du skall observera **5** oberoende stokastiska variabler $X_1, \dots, X_5$ med samma sannolikhetstäthet som beror på en okänd positiv parameter **θ** och har formen

   f(x;θ) = θ exp(θ x) när **x<0** (och **f(x;θ) =0** när **x ≥ 0).**

   a. Härled Maximum Likelihood-skattningen av **θ.** (2p)
   b. Vad blir den observerade Maximum Likelihood-skattningen av **θ** om du observerat **x**-variablerna **-2.1** , **-3.7** , **-5.3**, **-1.8** och **-3.1** ? (1p)
   c. Vad är den teoretiska medianen i fördelningen bestämd av tätheten **f(x;θ)** uttryckt som funktion av **θ**? (1p)

Vänd!

d. Föreslå en lämplig punktskattning av medianen i fördelningen (se c-delen) baserad på $\mathbf{X_1,\dots,X_5}$. Beräkna också ett observerat värde på denna vid samma observationsserie som i b-delen ovan. (1p)

6. Empiriska fördelningar:
   a. Vad menas med en empirisk fördelningsfunktion för ett stickprov av en dimension? Ge ett exempel. (2p)
   b. Visa också att empiriska fördelningsfunktionen evaluerad i ett fixt argument alltid är en väntevärdesriktig punktskattning av den teoretiska fördelningsfunktionen (evaluerad i det fixa argumentet) som stickprovet av oberoende variabler representerar. (2p)

7. Låt **X** vara antalet oberoende försöksupprepningar som behöver göras till och med att en händelse **A,** som har sannolikheten **p=0.15** i varje enskilt försök, inträffar för första gången.

   a. Vad är sannolikheten att **X** får ett udda utfall? (dvs för att **X** tillhör mängden **{1,3,5,7,….}**) (2p)
   b. Låt nu **Y=** antalet försöksupprepningar som behövs till och med att händelsen inträffar för andra gången. Vad är sannolikheten att **Y** får ett udda utfall. (2p)

8. Ett större skogsparti innehåller **300** älgkalvar. Ett visst okänt antal **k** av dessa är honor och resten **300-k** är hannar. Du fångar in **50** älgar och finner att **32** av dessa är honor.
   a. Momentskatta den okända parametern **k**. (2p)
   b. Försök att på lämpligt sätt argumentera för att skattningen i a-delen också kan ses som en observerad maximum likelihoodskattning av **k**. (2p)